

Fórmulas de vectores en el espacio.

Vectores en el espacio.

Vector fijo.

Definición	Se llama vector fijo en el espacio $\overrightarrow{AB}$ a un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en el punto B.
Características	• Dirección: conjunto de rectas paralelas sobre la que podemos representar el vector. • Sentido: viene determinado por su origen y extremo. • Módulo: valor de la longitud del segmento que va desde el origen al extremo. El módulo de un vector viene determinado por la siguiente fórmula: $ \vec{u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Representación de un vector en el espacio.

Coordenadas cartesianas	$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$
Mediante origen en A y extremo en B	$\begin{cases} A (x_1, y_1, z_1) \\ B (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

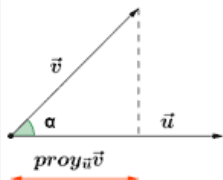
Operaciones con vectores.

Suma	$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
Resta	$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$
Producto por un escalar	$k \cdot \vec{u} = k \cdot (u_1, u_2, u_3) = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, k \cdot u_3)$

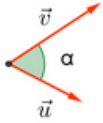
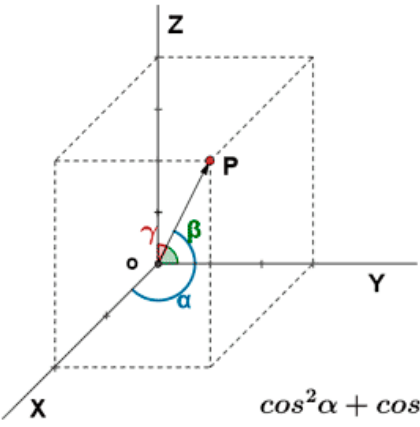
Dependencia e independencia lineal.

Combinación lineal	$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + k_n \cdot \vec{u}_n, \quad k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$
Linealmente dependientes	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Linealmente dependientes}$
Linealmente independientes	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Linealmente independientes}$

Producto escalar de dos vectores en el espacio.

Expresión geométrica	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \vec{v} \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \text{ si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son no nulos.}$	
Expresión analítica	$\begin{cases} \vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{v} = (y_1, y_2, y_3) \end{cases}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$	
Proyecciones	Proyección de un vector $\vec{u} (x_1, x_2, x_3)$ sobre un vector $\vec{v} (y_1, y_2, y_3)$: Segmento proyección: $\text{Proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{v} } = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$ Vector proyección: $\overrightarrow{\text{Proy}_{\vec{u}} \vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{v} ^2} \vec{v} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} (y_1, y_2, y_3)$	

Ángulo entre dos vectores en el espacio.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \vec{v} }$	
$\cos \alpha = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \right)$	
Cosenos directores  $\cos \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ $\cos \beta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ $\cos \gamma = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$	

Producto vectorial de dos vectores en el espacio.

Vectores	$\begin{cases} \vec{u} (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{v} (y_1, y_2, y_3) \end{cases}$	
Características	Módulo	$ \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \vec{v} \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
	Dirección	Perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$
	Sentido	El del avance de un sacacorchos que gira en sentido positivo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Expresión analítica	$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$	

Interpretación geométrica del producto vectorial de dos vectores en el espacio.

Figura	Área
Paralelogramo	$A_{\text{paralelogramo}} = \left \vec{u} \right \cdot h = \left \vec{u} \right \cdot \left \vec{v} \right \cdot \text{sen } \alpha = \left \vec{u} \times \vec{v} \right $
Triángulo	$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \left \vec{u} \times \vec{v} \right = \frac{1}{2} \left \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right $

Producto mixto de tres vectores en el espacio.

Vectores	$\begin{cases} \vec{u} (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{v} (y_1, y_2, y_3) \\ \vec{w} (z_1, z_2, z_3) \end{cases}$	Producto mixto: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$
-----------------	---	---

Aplicaciones del producto mixto de tres vectores en el espacio.

Cuerpo geométrico	Volúmen
Paralelepípedo	$V_{\text{paralelepípedo}} = \left [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right = \left [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] \right $
Tetraedro	$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} V_{\text{paralelepípedo}} = \frac{1}{6} \left [\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AD}] \right = \frac{1}{6} \left [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right $

Fórmulas de rectas y planos en el espacio.

Coordenadas del punto medio de un segmento	A (x_1, y_1, z_1) B (x_2, y_2, z_2)	$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$
Coordenadas del baricentro de un triángulo	A (x_1, y_1, z_1) C (x_2, y_2, z_2) D (x_3, y_3, z_3)	$B = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$
Coordenadas del punto simétrico respecto otro punto	A (x_1, y_1, z_1) B (x_2, y_2, z_2) S (a, b, c)	Simétrico de A respecto a B: $\frac{x_1+a}{2} = x_2 \quad \frac{y_1+b}{2} = y_2 \quad \frac{z_1+c}{2} = z_2$
Puntos alineados	A (x_1, y_1, z_1) B (x_2, y_2, z_2) C (x_3, y_3, z_3)	$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} = \frac{z_2-z_1}{z_3-z_2}$
Puntos coplanarios	A (x_1, y_1, z_1) B (x_2, y_2, z_2) C (x_3, y_3, z_3)	$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 & z_3-z_2 \end{vmatrix} = 0$
Vector perpendicular a	uno dado $\vec{u} (u_1, u_2, u_3)$	Obtenemos $\vec{w}$: $\vec{u} \perp \vec{w} \rightarrow \vec{w} (-u_2, u_1, 0)$
	otros dos $\vec{u}$ y $\vec{v}$	Obtenemos $\vec{w}$: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

Ecuaciones de la recta en el espacio.

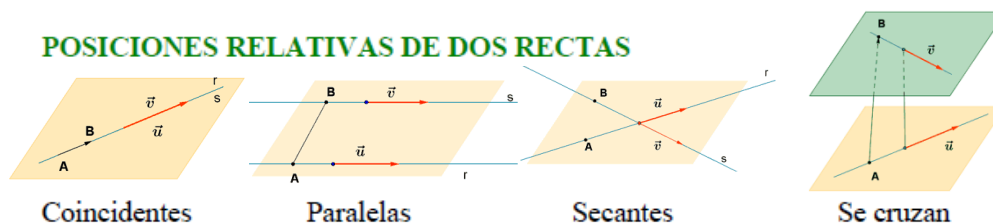
Ecuación	Punto y vector director	Expresión
Ecuación vectorial	Punto A (x_0, y_0, z_0) Vector director $\vec{u} (u_1, u_2, u_3)$	$r \equiv (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$
Ecuación paramétrica	Punto A (x_0, y_0, z_0) Vector director $\vec{u} (u_1, u_2, u_3)$	$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}$
Ecuación continua	Punto A (x_0, y_0, z_0) Vector director $\vec{u} (u_1, u_2, u_3)$	$r \equiv \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$
Ecuación implícita	Vector director $\vec{u}$: $\vec{u} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$	$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Ecuaciones del plano en el espacio.

Ecuación	Punto y vectores	Expresión
Ecuación vectorial	Punto $A(x_0, y_0, z_0)$ Vectores directores $\begin{cases} \vec{u}(u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v}(v_1, v_2, v_3) \end{cases}$	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
Ecuación paramétrica	Punto $A(x_0, y_0, z_0)$ Vectores directores $\begin{cases} \vec{u}(u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v}(v_1, v_2, v_3) \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{v}_1 \\ y = y_0 + \lambda \vec{u}_2 + \mu \vec{v}_2 \\ z = z_0 + \lambda \vec{u}_3 + \mu \vec{v}_3 \end{cases}$
Ecuación general	Punto $A(x_0, y_0, z_0)$ Vectores directores $\begin{cases} \vec{u}(u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v}(v_1, v_2, v_3) \end{cases}$ Vector normal $\vec{n}(A, B, C)$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & \vec{u}_1 & \vec{v}_1 \\ y-y_0 & \vec{u}_2 & \vec{v}_2 \\ z-z_0 & \vec{u}_3 & \vec{v}_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$
	Tres puntos: $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ $C(x_3, y_3, z_3)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$
Ecuación canónica o segmentaria	Puntos de corte del plano con los ejes $A(a, 0, 0)$ $B(0, b, 0)$ $C(0, 0, c)$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

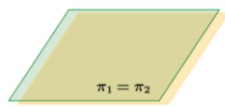
POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS



Método: Escribimos las ecuaciones paramétricas de cada una de ellas (con distinto parámetro), las igualamos y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución $\Rightarrow$ Se cortan en un punto $\Rightarrow$ Secantes.
- Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ Se cortan en infinitos puntos $\Rightarrow$ Coincidentes.
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución $\Rightarrow$ No se cortan $\Rightarrow$ Paralelas o se cruzan.
 - Hallar el vector director de cada una
 - Si son paralelos (proporcionales) las rectas son paralelas
 - Si no son paralelos, las rectas se cruzan.

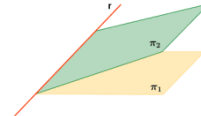
POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS



Coincidentes



Paralelos

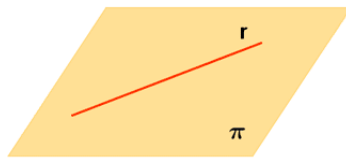


Secantes

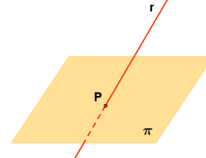
Método: Escribimos las ecuaciones generales de cada uno de ellos y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ No puede ser
- Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ Se cortan en infinitos puntos $\Rightarrow$ Se cortan en un plano o en una recta
 - Si hay un grado de libertad $\Rightarrow$ Un vector $\Rightarrow$ Se cortan en una recta $\Rightarrow$ Secantes
 - Si hay dos grados de libertad $\Rightarrow$ Dos vectores $\Rightarrow$ Se cortan en un plano $\Rightarrow$ Coincidentes
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución $\Rightarrow$ No se cortan $\Rightarrow$ Paralelos.

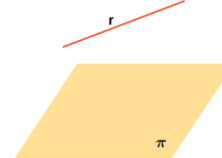
POSICIÓN RELATIVA ENTRE RECTA Y PLANO



Recta Contenida en el plano



Secantes



Paralelos

Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta y la general del plano y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución $\Rightarrow$ Se cortan en un punto $\Rightarrow$ Secantes.
- Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ Se cortan en infinitos puntos $\Rightarrow$ Recta contenida en el plano.
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución $\Rightarrow$ No se cortan $\Rightarrow$ Paralelos.

ÁNGULOS

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS $\cos(r_1, r_2) = \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$

ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS $\cos(\Pi_1, \Pi_2) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$

ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO $\text{Sen}(r, \Pi) = \cos(\vec{v}_r, \vec{n}_\Pi) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\Pi|}{|\vec{v}_r| |\vec{n}_\Pi|}$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$

$$D(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

$$D(P, r) = \frac{|\vec{PP_r} \times \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|}$$

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO: $P(x_0, y_0, z_0)$, $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$D(P, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

$$D(r, s) = \frac{|[\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{P_rP_s}]|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|}$$

DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

$$D(r, \Pi) = d(P_r, \Pi)$$

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS

$$D(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_1, \Pi_2)$$

POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS

Coincidentes	Dos coincidente y el otro secante	Dos coincidentes y Paralelos el otro paralelo	Paralelos
Dos paralelos Y el otro secante	Secantes en una recta	Secantes en un punto	Secantes 2 a 2 en una recta

Escribimos las ecuaciones de los tres planos en forma general y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución $\Rightarrow$ Se cortan en un punto
- Sistema compatible indeterminado:
 - Un grado de libertad: Se cortan en una recta
 - Dos planos coincidentes y el otro secante
 - Los tres se cortan en una recta
 - Dos grados de libertad: Se cortan en un plano $\Rightarrow$ Coincidentes
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución
 - Dos coincidentes y el otro paralelo
 - Tres paralelos
 - Dos paralelos y el otro los corta
 - Se cortan dos a dos en una recta

Ecuaciones de los planos	Rango (M)	Rango (M')	Proporcionalidad	Posición relativa	
$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $\pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$	1	1		Planos coincidentes (SCI)	planos coincidentes
	1	2		Tres planos paralelos (SI)	Tres planos paralelos
			$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$	Dos planos coincidentes y otro paralelo a ellos (SI)	dos planos coincidentes y otro paralelo a ellos
				Tres planos secantes en una recta común (SCI)	Tres planos secantes en una recta
$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ $M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$	2	2	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$	Dos planos coincidentes y otro secante a ambos (SCI)	Dos planos coincidentes y otro que los corta en la recta r
	2	3		Prisma. Planos secantes dos a dos (SI)	Planos que forman un prisma Planos secantes o que se cortan dos a dos
			$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$	Dos planos paralelos y otro secante a ambos (SI)	Dos planos paralelos y otro que los corta
	3	3		Triedro. Planos secantes en un punto (SC)	TRIEDRO